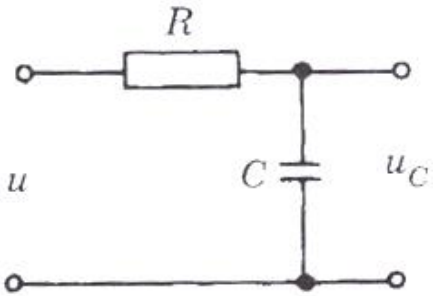
Честотен анализ



Глава 6
ЧЕСТОТЕН АНАЛИЗ

Честотният анализ на линейни електронни схеми се използва за теоретична оценка на поведението им в установен синусоиден режим. При него капацитетите и индуктивностите се описват с техните импеданси $1/(j\omega C)$ и $j\omega L$. Използва и означението $p = j\omega$, като p се нарича *комплексна променлива*. При използването ѝ всеки от първичните или вторичните параметри на една линейна схема се дава с общия израз

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{X}_C.I}{\dot{Z}.I} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$(1.63\ a) \qquad H(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \ldots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0} = \frac{N(p)}{D(p)},$$

$$H(\mathrm{p}) = \frac{1}{1 + p.RC}$$

в който коефициентите a_j и b_j са реални положителни или отрицателни изрази или числа, зависещи от елементите на схемата . Степента n на знаменателя се нарича *ред на функцията*. Съществуват частни случаи, при които е изпълнено $m = 0$ или $n = 0$, като в последния случай редът на функцията е m. Когато $H(p)$ е предавателна функция, n се нарича *ред на схемата*. Най-често се използват електронни схеми от I и II ред (n е съответно 1 и 2).

Нискочестотният филтър е схема от 1-ред, защото (jω) е на първа степен, n=1.

6.1. ПОЛЮСИ И НУЛИ

Корените на полинома $N(p)$ в числителя на уравнение (1.63 *а*) се отбелязват със z_j и се наричат *нули* на $H(p)$, тъй като е изпълнено $H_{p=z_j} = 0$. Корените на знаменателя $D(p)$ са *полюси* на $H(p)$ и се означават с p_i. За всеки от тях е в сила $H(p) \to \infty$. Простите реални корени на $N(p)$ и $D(p)$ носят съответно наименованията *реална нула* и *реален полюс*, а кратните корени — *k-кратна реална нула* и *k-кратен реален полюс*. При комплексни корени (винаги комплексно спрегнати от вида $\alpha + j\omega$) се използват наименованията *комплексно спрегната нула* и *комплексно спрегнат полюс*. Тъй като всеки полином може да се представи като произведение от множители, които съдържат корените му, уравнение (1.63 *а*) се преобразува в следното:

$$H(p) = H\frac{\prod(p - z_j)\prod(p - z_j)^k\prod\left(p^2 + a_{1j}p + a_{0j}\right)}{\prod(p - p_i)\prod(p - p_i)^k\prod\left(p^2 + b_{1i}p + b_{0i}\right)}, \qquad (1.63\ б)$$

където H е коефициент, k — произволно цяло положително число (може и 0) и коефициентите a_1, a_0, b_1 и b_0 — положителни величини,

които зависят от елементите на схемата, описвана от $H(p)$. Първите произведения в числителя и знаменателя отразяват съответно реалните нули и полюси, вторите — кратните нули и полюси и третите — комплексно спрегнатите нули и полюси. Изразът (1.63 *б*) показва, че произволна функция $H(p)$ се състои от *функции от I ред* $p+\alpha_i$ и *функции от II ред* $p^2+b_1p+b_0$, като $b_{1i}=2a_i$ и $b_{0i}=\alpha_i^2+\omega_i^2$. Когато $H(p)$ е предавателна функция се предпочита вместо уравнение (1.63 *б*) да се използват изразите за нейния модул

$$20\lg|H(p)| = 20\lg H + 20\lg(p-z_1)+\ldots-20\lg(p-p_1)-\ldots \qquad (1.63\ в)$$

и фаза

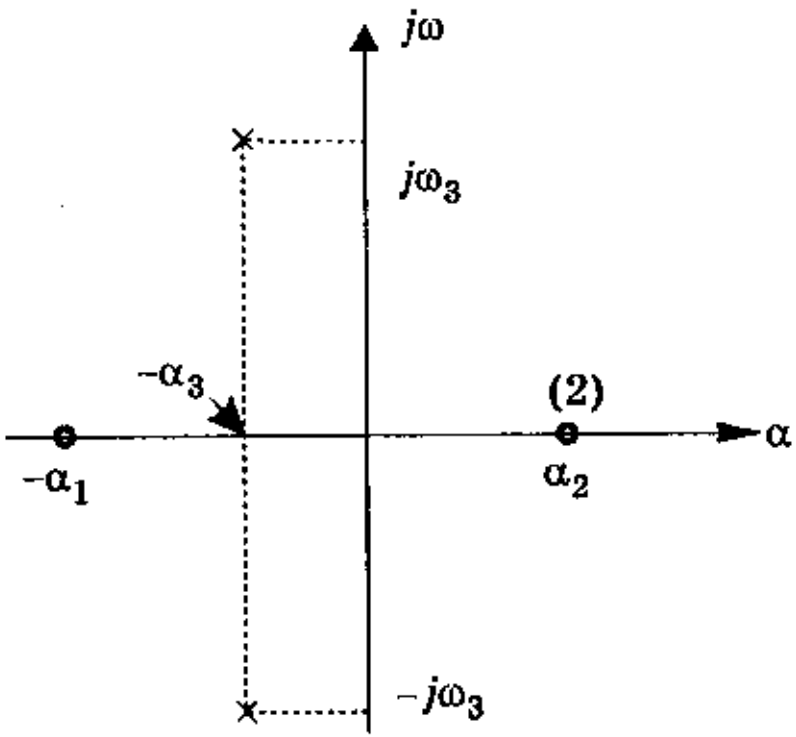
$$\varphi(p) = \operatorname{arctg} H(p) = \varphi_{z1}+\varphi_{z2}+\ldots-\varphi_{p1}-\varphi_{p2}-\ldots \qquad (1.63\ г)$$

Уравнения (1.63 *б*)–(1.63 *г*) показват, че за анализа на произволна функция $H(p)$ е достатъчно да се познава поведението на функциите от I и II ред.

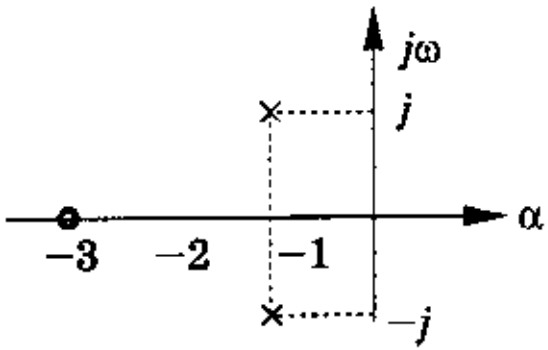
Графически полюсите и нулите се изобразяват в комплексната равнина съответно с кръстчета и кръгчета. Като пример на фиг. 1.81 *а* е дадено разпределението на полюсите и нулите на функцията

$$H(p) = \frac{(p+\alpha_1)(p-\alpha_2)^2}{p^2 + 2\alpha_3 p + \alpha_3^2 + \omega_3^2}.$$

От кой ред е системата и колко полюса и нули има?



а



б

6.2. МЕТОД НА БОДЕ

Методът на Боде е най-масово използваният за честотен анализ. Същността му се състои в подаване между две точки на електронна схема на синусоиден сигнал $\dot{S}_1$ с постоянна амплитуда и изменяща се честота (в общия случай от 0 до ∞) и определяне на сигнала $\dot{S}_2$ между други две точки на схемата при различни честоти (от значение са както амплитудата S_2, така и фазата φ_2). Обикновено вместо $\dot{S}_2$ се анализира функцията $H(p) = S_2/S_1$, като в зависимост от случая се използват съответно комплексният ѝ вид

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

(1.64 *а*) $$H(p) = A(\omega) + jB(\omega),$$

модулът

(1.64 *б*) $$H(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \text{ или } H_{\text{dB}}(\omega) = 20\lg H(\omega) \text{ dB}$$

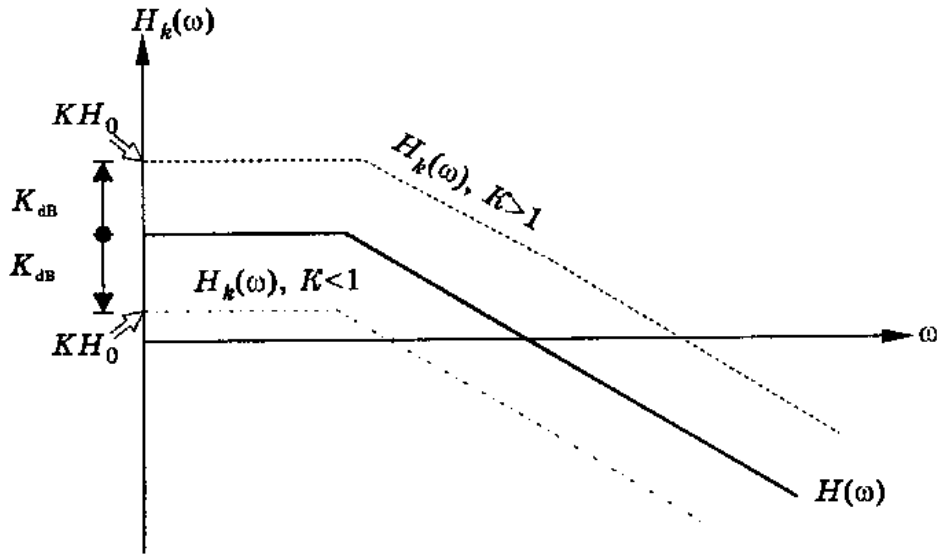
$$K(\omega) = \sqrt{(\operatorname{Re}\dot{K})^2 + (\operatorname{Im}\dot{K})^2}$$

и фазата

$$\phi(\omega) = arctg(\operatorname{Im}\dot{K} / \operatorname{Re}\dot{K})$$

(1.64 *в*) $$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{B(\omega)}{A(\omega)}.$$

Тази постановка позволява електронната схема да се разглежда като четириполюсник с вход между точките, където се подава $\dot{S}_1$, и изход между тези, където се определя $\dot{S}_2$. Графиките $H(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ са съответно неговите АЧХ и ФЧХ, т. е. методът на Боде е приложим за четириполюсници. Възможно е методът да се използва и за из-

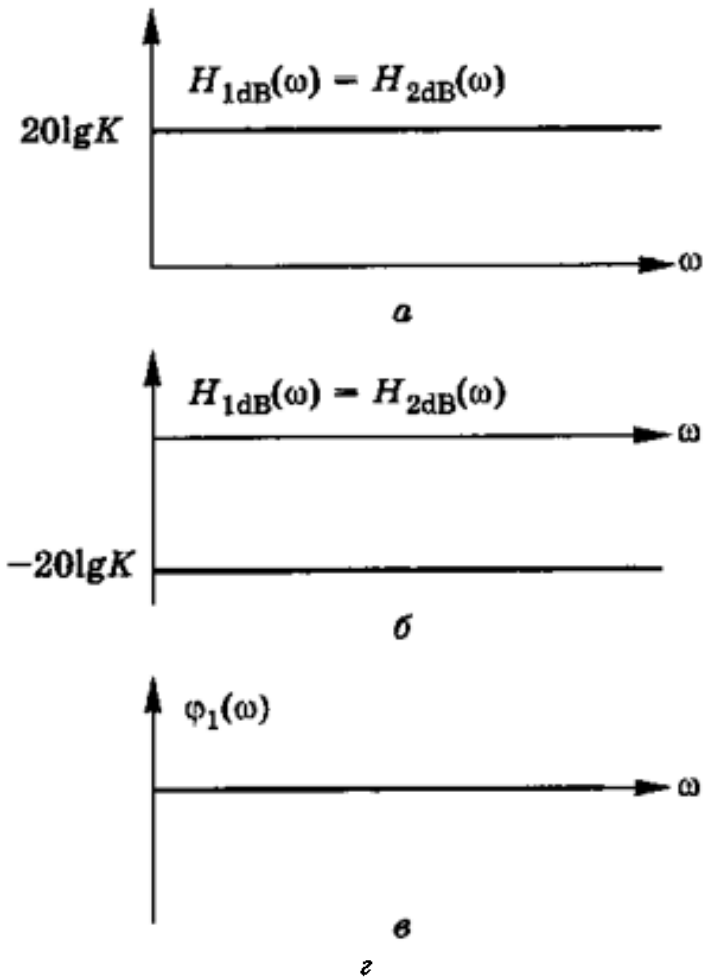


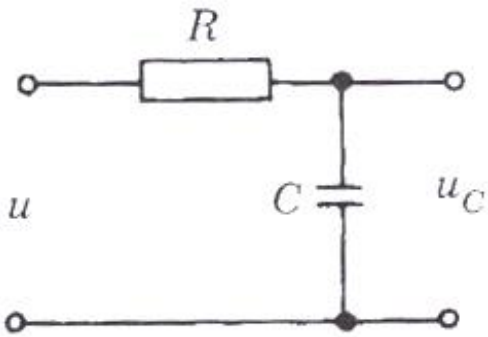
Фиг. 1.82

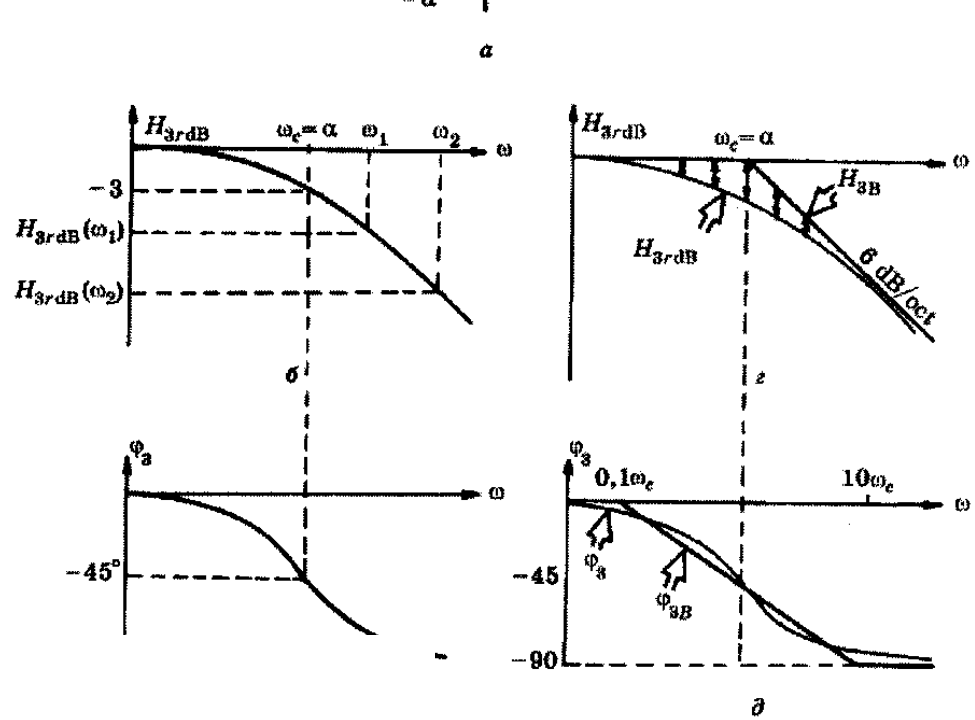
Функцията $H_k(p) = KH(p)$, където $K = \text{const}$, има модул $H_k(\omega) = KH(\omega)$ или $H_{k\text{dB}}(\omega) = 20\lg K + 20\lg H(\omega) = K_{\text{dB}} + 20\lg H(\omega)$ и фаза $\varphi_k(\omega) = \varphi(\omega)$. Следователно АЧХ на функцията $H_k(p)$ има същия ход, както АЧХ на функцията $H(p)$, но е транслирана във вертикална посока (фиг. 1.82). Това позволява въвеждането на величината *нормиран модул*:

(1.65 *a*) $$H_r(\omega) = \frac{H(\omega)}{H_0} \quad \text{или} \quad H_{r\text{dB}}(\omega) = H_{\text{dB}}(\omega) - H_{0\text{dB}}.$$

Функции от нулев ред. Функция от нулев ред означава, че е в сила $m = n = 0$, т. е. $H(p) = \text{const}$. Първата функция е $H_1(p) = K$ и има АЧХ като показаната на фиг. 1.83 *а* при $K > 1$ и като тази на фиг. 1.83 *б* при $K < 1$. В съответствие с уравнение (1.64 *в*) се получава $\varphi_1(\omega) = 0$ и ФЧХ е показана на фиг. 1.83 *в*.







Фиг. 1.84

Функция от 1 ред

(1.66 *а*)
$$H_3(p) = \frac{H_{30}}{\frac{p}{\alpha} + 1},$$

която има модул и фаза съответно

(1.66 *б*)
$$H_3(\omega) = \frac{H_{30}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 + 1}}, \quad \varphi_3(\omega) = -\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{\alpha}.$$

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{X}_C.I}{\dot{Z}.I} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\frac{p}{1/RC} + 1}$$

$$\alpha = \frac{1}{RC} \rightarrow K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}}$$

Като се използват уравненията (1.66 *б*), се получават нормираните АЧХ (фиг. 1.84 *б*) и ФЧХ (фиг. 1.84 *в*) на функцията. При *граничната ъглова честота* $\omega_c = \alpha$ модулът става равен на $H_{30}/\sqrt{2}$. Съответно величината $f_c = \omega_c/2\pi$ е *граничната честота* на функцията и на четириполюсника, за когото се отнася. При честота f_c се получава $\varphi_3 = 45°$.

$$\varphi(\omega) = arctg(-\omega RC)$$

$$\omega_C = \alpha \rightarrow \omega_C = \frac{1}{RC}$$

За да се оцени промяната на модула на произволна функция с честотата, се въвежда параметърът *стръмност S на АЧХ*. Обикновено тя се изчислява по формулата

$$S = 20\lg\frac{H(\omega)}{H(2\omega)} = \left|H_{r\mathrm{dB}}(\omega) - H_{r\mathrm{dB}}(2\omega)\right| \tag{1.67}$$

и се измерва в децибели на октава [dB/oct], тъй като отношението $2\omega/\omega = 2$ представлява една октава. Вместо величината $H_r(2\omega)$ може да се използва $H_r(10\omega)$, чието измерение е децибели на декада [dB/dec], тъй като десетократното изменение на честотата представлява една декада. В някои случаи честотният обхват от ω_c до $2\omega_c$ се нарича *първа октава*, от $2\omega_c$ до $4\omega_c$ — *втора октава* и т. н. Модулът $H_з(\omega)$ при достатъчно високи честоти ($\omega >> \alpha$ има вида $H_з(\omega) \approx \alpha H_з(0)/\omega$ и съответно е в сила $S = 6$ dB/oct или 20 dB/dec според уравнение (1.67).

$$H(\omega) = \frac{H_{30}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 + 1}} = \frac{H_{30}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}} = \frac{\alpha H_{30}}{\omega} \Rightarrow S = 20\lg\left(\frac{\omega_C.1}{2\omega_C}\right) = 20\lg\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left|20(-0.301)\right| = 6\,\mathrm{dB/\,oct}; \quad S = 20\lg\left(\frac{\omega_C.1}{10\omega_C}\right) = \left|20\lg\left(\frac{1}{10}\right)\right| = 20\mathrm{dB/dec}$$

Голямо улеснение при оценката на работата на електронните схеми са *диаграмите на Боде*, които представляват апроксимиращи прави, заменящи АЧХ и ФЧХ. При тях ω (или Ω) се нанася по абсцисната ос в логаритмичен мащаб. От фиг. 1.84 б се вижда сравнително малката промяна на $H_{3r\mathrm{dB}}$ в обхвата от 0 до ω_c, което позволява АЧХ в този обхват да се замени с права линия, съвпадаща с абсцисната ос (фиг. 1.84 *г*), т. е. с уравнение $H_{3r\mathrm{dB}} = 0$. Това позволява допускане, че модулът има постоянна стойност H_{30} в обхвата $0-\omega_c$. Останалата част (от ω_c до ∞) се заменя с втора права линия, която има стръмност 6 dB/oct. Двете прави образуват *диаграмата на Боде за модула*, като аналитичният ѝ израз е

(1.66 *в*)
$$H_{3B} = \begin{cases} 0 & , \ \omega \le \omega_c \\ 20\lg\dfrac{\omega_c}{\omega} \ \mathrm{dB}, & \omega \ge \omega_c. \end{cases}$$

$\log_{10} 2=0.301$
$\log_{10} (1/2)=-0.301$

От уравненията (1.66 *б*, *в*) може да се определи разликата между АЧХ и нейната диаграма на Боде (вж. зад. 1.79). ФЧХ се замества с три прави (фиг. 1.84 *д*), които образуват *диаграмата на Боде за фазата*. Нейното уравнение при логаритмичен мащаб по абсцисната ос е

(1.66 *г*)
$$\varphi_{3B} = \begin{cases} 0^\circ, \ \omega \le 0{,}1\omega_c \\ -45^\circ\left(1 + \lg\dfrac{\omega}{\omega_c}\right), \ 0{,}1\omega_c < \omega < 10\omega_c \\ -90^\circ, \ \omega \ge \omega_c. \end{cases}$$

Функции от II ред. Една от най-често използваните функции в електронните схеми е

(1.71 *а*) $$H_7(p) = \frac{H_{70}}{b_2 p^2 + b_1 p + 1} = \frac{H'_{70}}{p^2 + b'_1 p + b'_0} = \frac{H_{70}}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0} p + 1}.$$

Практически се използват и трите израза, като връзките между коефициентите им са

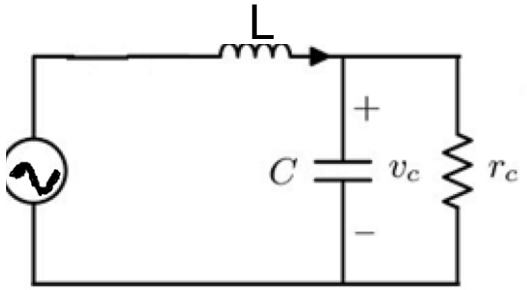
(1.71 *б*) $$H_{70} = b_2 H'_{70}, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b_2}} = \sqrt{b'_0}, z = \frac{b_1}{2\sqrt{b_2}} = \frac{b'_1}{2\sqrt{b'_0}}, b'_0 = \frac{1}{b_2}, b'_1 = \frac{b_1}{b_2}.$$

Сравнително най-голямо е приложението на третия израз от уравнение (1.71 *а*), който има следните модул и фаза:

(1.71 *в*) $$H_7(\omega) = \frac{H_{70}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4z^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}, \quad \varphi_7(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{2z}{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}.$$

Нормирането по честота се извършва обикновено спрямо ω_0, т. е. $\Omega = \omega/\omega_0$, откъдето се получава

(1.71 *г*) $$H_{7r}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \Omega^2\right)^2 + 4z^2\Omega^2}}, \quad \varphi_7(\Omega) = \operatorname{arctg} \frac{2z}{\Omega - \frac{1}{\Omega}}.$$



$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{X}_2.I}{\dot{Z}.I} = \frac{\left(R\frac{1}{j\omega C}\right) / \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}{j\omega L + R/(1 + j\omega CR)}$$

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\frac{R}{1 + j\omega CR}}{(j\omega L(1 + j\omega CR) + R)/(1 + j\omega CR)}$$

$$= \frac{R}{j\omega L(1 + j\omega CR) + R} = \frac{R}{pL(1 + \mathrm{pRC}) + \mathrm{R}}$$

$$= \frac{R}{p^2 LCR + p.L + R} = \frac{1}{p^2.LC + p.\frac{L}{R} + 1}$$

$$= \frac{1}{p^2/\omega_0^2 + p.\frac{2.z}{\omega_0} + 1},$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L.C};$$

$$\frac{2.z}{\omega_0} = \frac{L}{R}; z = \frac{L}{2R}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}.\frac{1}{R} = \frac{1}{2}\frac{\rho}{R}$$

При $\omega >> \omega_0$ модулът от уравнение (1.71 *в*) се опростява и добива вида $H_7(\omega) \approx H_{70} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$. Това означава, че при всяко удвояване на честотата той намалява 4 пъти, т. е. стръмността на АЧХ е 12 dB/oct.

В зависимост от стойността на *коефициента на потискане z* от израза (1.71 *г*) съществуват три вида полюси на $H_7(p)$. При $z > 1$ те са два реални полюса (фиг. 1.88 *а*) и функцията се записва във вида

(1.72 *а*)
$$H_7(p) = \frac{H_{70}}{\left(\frac{p}{\omega_1} + 1\right)\left(\frac{p}{\omega_2} + 1\right)},$$

където

(1.72 *б*)
$$\omega_{1,2} = \omega_0\left(z \mp \sqrt{z^2 - 1}\right), \ \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}\ .$$

Вижда се, че $H_7(p)$ представлява произведение на две функции от I ред. На фиг. 1.88 *б* и *в* с тънка линия са начертани съответно АЧХ и ФЧХ, а с плътна линия — диаграмата на Боде на АЧХ. Граничната честота се определя от израза

(1.72 *в*)
$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2 + \sqrt{\left(1 - 2z^2\right)^2 + 1}}\ ,$$

като винаги е изпълнено $\omega_c < \omega_1$. При $z \geq 1{,}5$ (или $\omega_2 \geq 7\omega_1$) двата полюса са далеч един от друг, ω_2 може да се пренебрегне (все едно, че е в безкрайност) и се получава $H_7(p) \approx H_3(p)$, т. е. функцията от II ред се замества с функция от I ред, при което е изпълнено $\omega_c \approx \omega_1$.

Вторият случай е на реален двоен полюс (фиг. 1.89 *а*), който се получава при $z = 1$. Функцията, модулът и фазата ѝ имат вида

$$(1.73\ a)\qquad H_7(p) = \frac{H_{70}}{\left(\dfrac{p}{\omega_0}+1\right)^2},\ H_7(\omega) = \frac{H_{70}}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2},\ \varphi_7(\omega) = -2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_0},$$

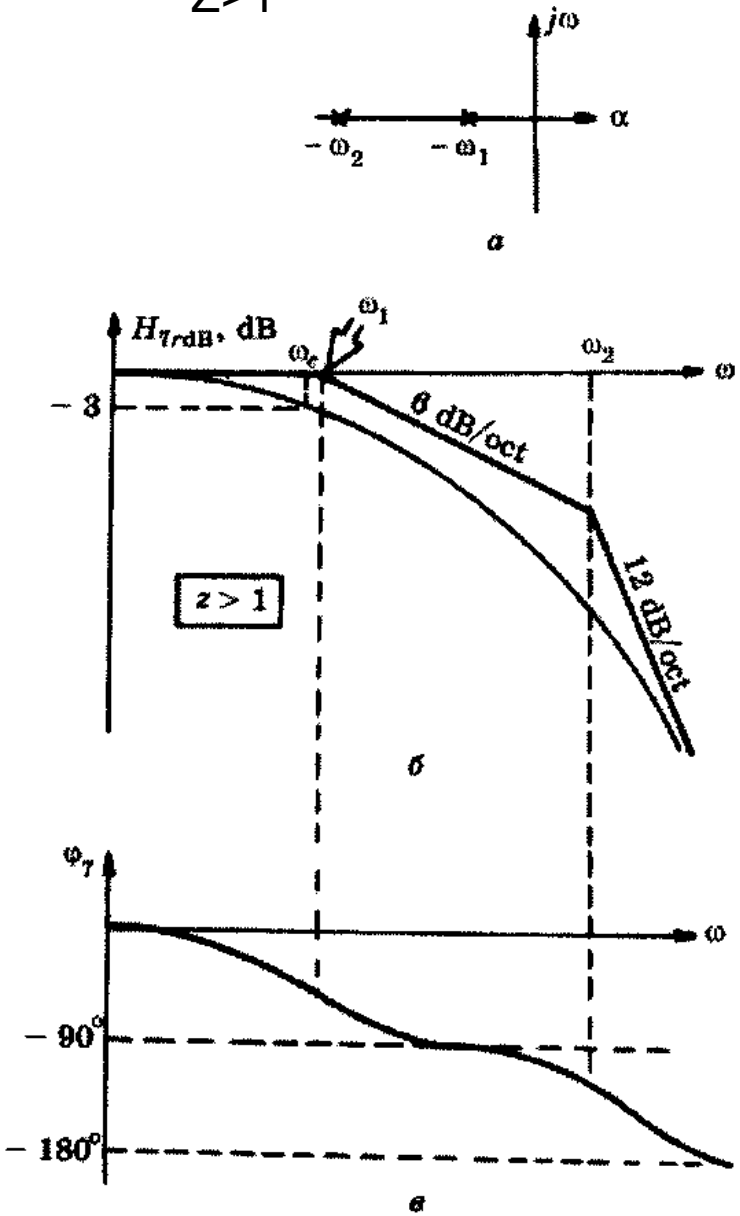
граничната честота е

$$.73\ б)\qquad \omega_c = \omega_0\sqrt{\sqrt{2}-1} = 0{,}644\omega_0.$$

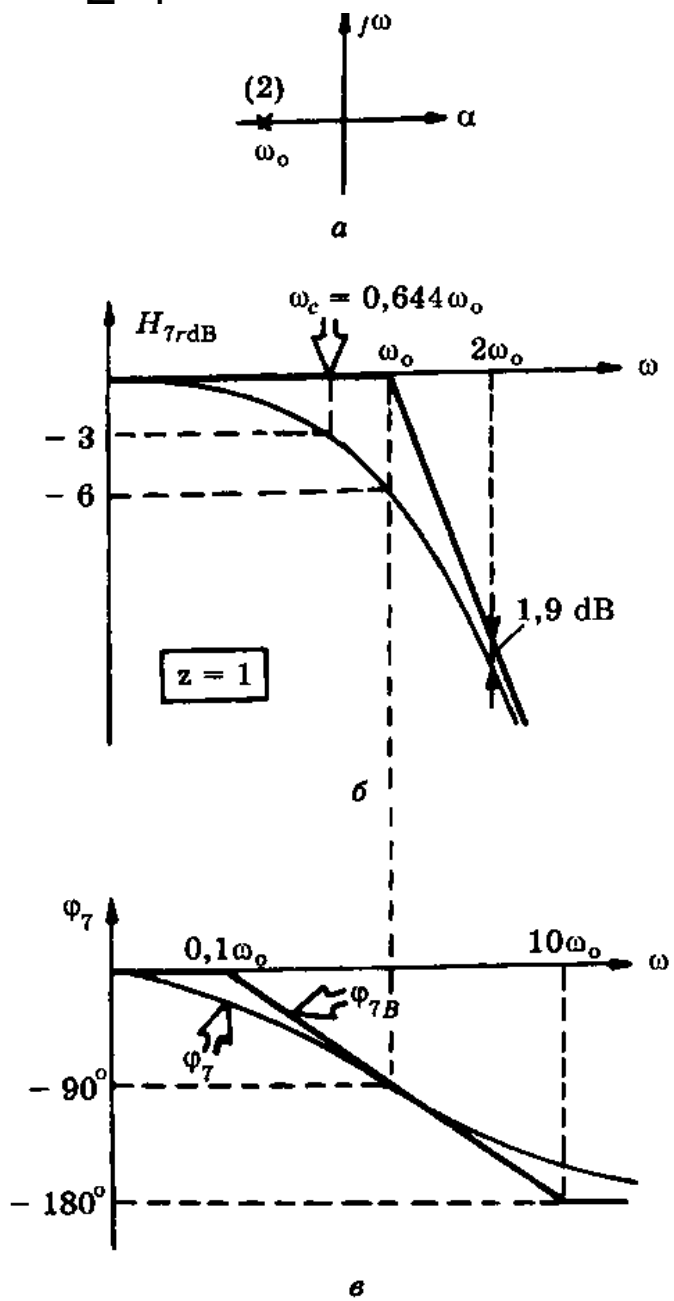
а фиг. 1.89 *б*, *в* са дадени съответно АЧХ и ФЧХ, както и диаграмите на Боде. Последните се описват с уравненията

$$.73\ в)\qquad H_{7B} = \begin{cases} 0\ \text{dB}, & \omega \leq \omega_0 \\ 40\lg\dfrac{\omega_0}{\omega}\ \text{dB}, & \omega > \omega_0 \end{cases},$$

Z>1


jω
α
− ω2
− ω1
а
H7rdB, dB
ωc
ω1
ω2
ω
− 3
6 dB/oct
12 dB/oct
z > 1
б
φ7
ω
− 90°
− 180°
в

Z=1


jω
(2)
α
ωo
а
ωc = 0,644ωo
H7rdB
ωo
2ωo
ω
− 3
− 6
1,9 dB
z = 1
б
φ7
0,1ωo
10ωo
ω
φ7B
φ7
− 90°
− 180°
в

(1.73 *г*)
$$\varphi_{7B} = \begin{cases} 0^\circ, & \omega \le 0{,}1\omega_0 \\ -90^\circ\left(1 + \lg\dfrac{\omega}{\omega_0}\right), & 0{,}1\omega_0 < \omega < 10\omega_0 \\ -180^\circ, & \omega \ge 10\omega_0 \end{cases}.$$

Третият случай е на комплексно спрегнати полюси (фиг. 1.90 *а*), които се получават при $z < 1$ и се определят от израза

(1.74)
$$p_{1,2} = \omega_0\left(-z \pm j\sqrt{1 - z^2}\right).$$

За граничната честота ω_c отново е в сила уравнение (1.72 *в*). Особен практически интерес представлява случаят $z < 1/\sqrt{2}$, при който АЧХ е с отскок (фиг. 1.90 *б*). Големината на отскока

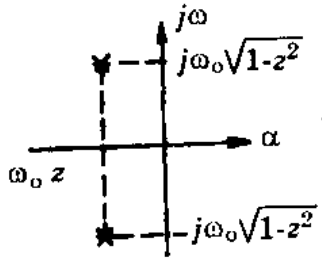
(1.75 *а*)
$$H_{7m} = \frac{H_{70}}{2z\sqrt{1 - z^2}}$$

се получава при ъглова честота

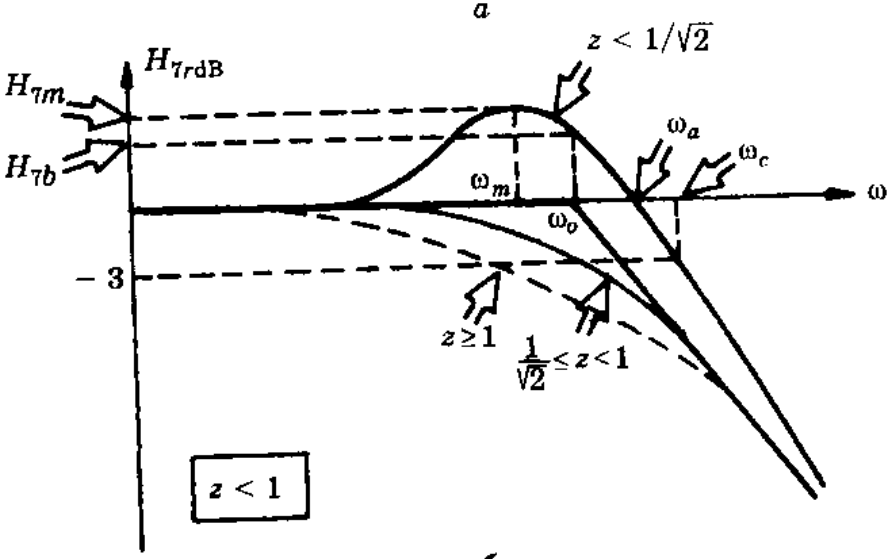
(1.75 *б*)
$$\omega_m = \omega_0\sqrt{1 - 2z^2}$$

и нараства с намаляване на z. Обикновено се използват нормираните стойности на отскока

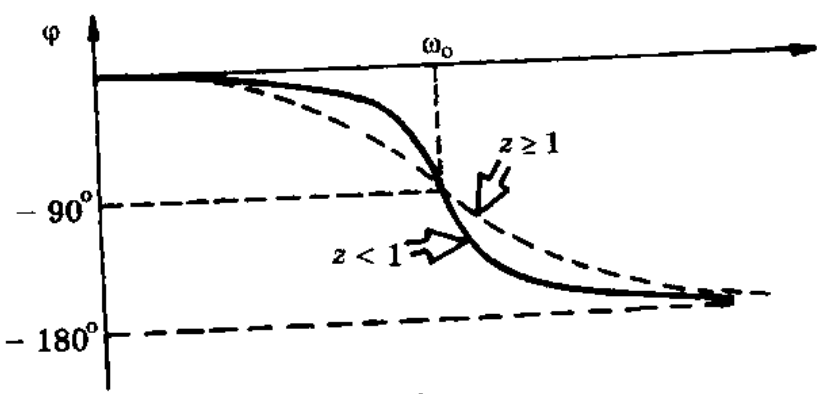
(1.75 *в*)
$$\varepsilon_{\text{dB}} = 20\lg\frac{H_{7m}}{H_{70}} = -20\lg\left(2z\sqrt{1 - z^2}\right)\ \text{dB},\quad \varepsilon = \left(\frac{H_{7m}}{H_{70}} - 1\right)100\ \%,$$



а



б



в

$$Z < \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{b_1'}{2\sqrt{b_0'}} = \frac{b_1\sqrt{b_2}}{2.b_2}$$

$$\frac{\rho}{2R} < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$